

# Méthode des éléments finis : treillis plans à nœuds articulés

Yves Debard

Institut Universitaire de Technologie du Mans  
Département Génie Mécanique et Productique

<http://iut.univ-lemans.fr/ydlogi/index.html>

*24 mars 2006 – 29 mars 2011*

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Matrices élémentaires</b>	<b>3</b>
<b>2 Exemple 1 : treillis soumis à une force nodale</b>	<b>6</b>
2.1 Énoncé . . . . .	6
2.2 Partition des degrés de liberté . . . . .	6
2.3 Étude élémentaire . . . . .	7
2.4 Assemblage et calcul des déplacements inconnus . . . . .	7
2.5 Efforts normaux dans les éléments . . . . .	7
2.6 Actions de liaison . . . . .	8
<b>3 Exemple 2 : treillis soumis à une force nodale</b>	<b>8</b>
3.1 Énoncé . . . . .	8
3.2 Partition des degrés de liberté . . . . .	8
3.3 Étude élémentaire . . . . .	9
3.4 Assemblage et calcul des déplacements inconnus . . . . .	9
3.5 Efforts normaux dans les éléments . . . . .	10
3.6 Actions de liaison . . . . .	10
<b>4 Exemple 3 : treillis soumis à une variation de température</b>	<b>10</b>
4.1 Énoncé . . . . .	10
4.2 Partition des degrés de liberté . . . . .	11
4.3 Étude élémentaire . . . . .	11
4.4 Premier cas de charge . . . . .	12
4.4.1 Assemblage et calcul des déplacements inconnus . . . . .	12
4.4.2 Efforts normaux dans les éléments . . . . .	12
4.4.3 Actions de liaison . . . . .	12
4.5 Deuxième cas de charge . . . . .	13
4.5.1 Assemblage et calcul des déplacements inconnus . . . . .	13
4.5.2 Efforts normaux dans les éléments . . . . .	13
4.5.3 Actions de liaison . . . . .	13
<b>5 Programmes Maple</b>	<b>14</b>
5.1 tre_mat . . . . .	14
5.2 exemple_1 . . . . .	14
5.3 exemple_2 . . . . .	15
5.4 exemple_3 . . . . .	15
<b>Références</b>	<b>16</b>

## Introduction

Un **treillis** est un ensemble de poutres droites (**éléments**) reliées entre elles par des rotules (**nœuds**). Les liaisons extérieures sont des rotules et des appuis simples. Les charges sont des forces portées par les rotules, des gradients thermiques et des déplacements d'appui. **La force intérieure dans une section droite se réduit à l'effort normal.**

Le treillis est plan si :

- Le plan  $\{O; x, y\}$  est un plan de symétrie pour toutes les sections droites.
- Les forces appliquées sont situées dans le plan  $\{O; x, y\}$ .

On suppose que **les déplacements sont petits.**

## 1 Matrices élémentaires

Soit  $(i \rightarrow j)$  un élément de treillis plan de section droite constante (figure 1).

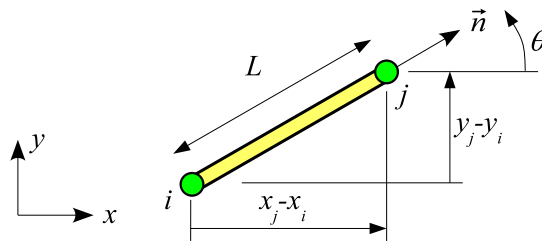


Figure 1 - Élément  $i \rightarrow j$

$L$  est la longueur de l'élément et  $A$  l'aire de sa section droite.

$(x_i, y_i)$  et  $(x_j, y_j)$  sont les coordonnées des nœuds de l'élément.

Le vecteur unitaire  $\vec{n}$  porté par l'axe de la poutre est défini par :

$$\begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{Bmatrix} x_j - x_i \\ y_j - y_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix}, \quad L^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \quad (1.1)$$

où  $\theta$  est l'angle que fait  $\vec{n}$  avec l'axe  $x$ .

$E$  et  $\alpha$  sont respectivement le module de Young et le coefficient de dilatation du matériau.

L'élément est soumis à un effort normal  $N$  (positif : traction, négatif : compression) et à une variation de température  $\Delta T$  constante.

$(u_i, v_i)$  et  $(u_j, v_j)$  sont les déplacements nodaux (figure 2).

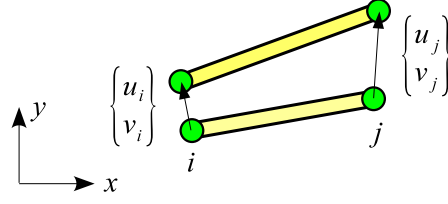


Figure 2 – Déplacements élémentaires

Les efforts aux extrémités de l'élément sont (figure 3) :

$$-N \vec{n} \text{ en } i \quad , \quad N \vec{n} \text{ en } j \quad (1.2)$$

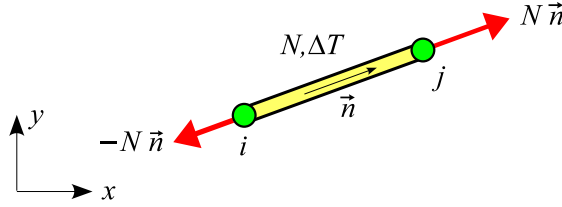


Figure 3 – Efforts élémentaires

Différentions la relation :

$$L^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \quad (1.3)$$

Il vient :

$$2L dL = 2(x_j - x_i)(dx_j - dx_i) + 2(y_j - y_i)(dy_j - dy_i) \quad (1.4)$$

d'où l'expression de l'allongement unitaire suivant  $\vec{n}$  :

$$\varepsilon_n = \frac{dL}{L} = \frac{1}{L} \left( \frac{(x_j - x_i)}{L} (dx_j - dx_i) + \frac{(y_j - y_i)}{L} (dy_j - dy_i) \right) \quad (1.5)$$

soit :

$$\varepsilon_n = \frac{1}{L} (n_x (u_j - u_i) + n_y (v_j - v_i)) \quad (1.6)$$

Cet allongement unitaire est dû à l'effort normal (loi de Hooke) et à la variation de température :

$$\varepsilon_n = \frac{N}{EA} + \alpha \Delta T \quad (1.7)$$

L'effort normal s'écrit en fonction des déplacements nodaux :

$$\begin{aligned} N &= EA(\varepsilon_n - \alpha \Delta T) \\ &= \frac{EA}{L} (n_x (u_j - u_i) + n_y (v_j - v_i)) - EA \alpha \Delta T \end{aligned} \quad (1.8)$$

soit :

$$N = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -n_x & -n_y & n_x & n_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} - EA \alpha \Delta T \quad (1.9)$$

On en déduit :

$$\{f_{\text{nod}}\} = [k] \{u\} - \{f_{\text{th}}\} \quad (1.10a)$$

avec :

$$\{f_{\text{nod}}\} = N \begin{Bmatrix} -n_x \\ -n_y \\ n_x \\ n_y \end{Bmatrix}, \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (1.10b)$$

$$[k] = \frac{EA}{L} \begin{Bmatrix} -n_x \\ -n_y \\ n_x \\ n_y \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} -n_x & -n_y & n_x & n_y \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} n_x^2 & n_x n_y & -n_x^2 & -n_x n_y \\ & n_y^2 & -n_x n_y & -n_y^2 \\ \text{sym.} & & n_x^2 & n_x n_y \\ & & & n_y^2 \end{bmatrix} \quad (1.10c)$$

$$\{f_{\text{th}}\} = EA \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} -n_x \\ -n_y \\ n_x \\ n_y \end{Bmatrix} \quad (1.10d)$$

$\{f_{\text{nod}}\}$  est le vecteur force nodal (N).

$\{u\}$  est le vecteur déplacement élémentaire (m).

$[k]$  est la matrice de rigidité (N/m).

$\{f_{\text{th}}\}$  est le vecteur force équivalent au gradient thermique (N).

*Remarque 1* : la matrice de rigidité peut se mettre sous la forme :

$$[k] = \begin{bmatrix} [\bar{k}] & -[\bar{k}] \\ -[\bar{k}] & [\bar{k}] \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad [\bar{k}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} n_x^2 & n_x n_y \\ n_x n_y & n_y^2 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

*Remarque 2* : la matrice de rigidité est égale à :

$$[k] = \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ n_y & 0 \\ 0 & n_x \\ 0 & n_y \end{bmatrix} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & n_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_x & n_y \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

ou :

$$[k] = \begin{bmatrix} n_x & -n_y & 0 & 0 \\ n_y & n_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_x & -n_y \\ 0 & 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & n_y & 0 & 0 \\ -n_y & n_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_x & n_y \\ 0 & 0 & -n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

*Remarque 3* : l'énergie de déformation est égale à (à un coefficient près indépendant des déplacements et de leurs dérivées) :

$$\begin{aligned} E_{\text{def}} &= \frac{1}{2} EA \varepsilon_n^2 L - EA \varepsilon_n \alpha \Delta T L \\ &= \frac{1}{2} \{u\}^T [k] \{u\} - \{u\}^T \{f_{\text{th}}\} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Le travail des forces extérieures se réduit au travail des forces nodales :

$$W_{\text{ext}} = \{u\}^T \{f_{\text{nod}}\} \quad (1.15)$$

L'énergie potentielle est égale à :

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{def}} - W_{\text{ext}} \quad (1.16)$$

La matrice de rigidité est la matrice hessienne (ou matrice de Hess) de l'énergie de déformation par rapport aux déplacements nodaux (programme `tre_mat`) :

$$k_{ij} = \frac{\partial^2 E_{\text{def}}}{\partial u_i \partial u_j} \quad (= k_{ji}) \quad (1.17)$$

Le vecteur des efforts aux nœuds est le gradient de l'énergie de déformation par rapport aux déplacements nodaux :

$$f_{\text{nod},i} = \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial u_i} \quad (1.18)$$

## 2 Exemple 1 : treillis soumis à une force nodale

### 2.1 Énoncé

Le treillis plan à noeuds articulés représenté sur la figure 4 est composé de trois poutres de même nature et de même section droite.

Soient  $E$  le module de Young du matériau et  $A$  l'aire des sections droites.

Le noeud 1 est articulé et le noeud 3 repose sur un appui simple dont la normale est horizontale.

Le noeud 2 porte une charge de composantes  $(0, P)$ .

**Application numérique :** on donne :

$$A = 100 \text{ mm}^2, L = 0.2 \text{ m}, E = 200000 \text{ MPa}, P = -10000 \text{ N}$$

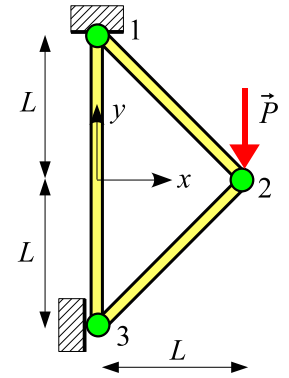


Figure 4 – Exemple 1

### 2.2 Partition des degrés de liberté

Effectuons une partition des degrés de liberté en déplacements connus et inconnus ( $[1]$ ,  $[12]$ ) :

$$\{U_L\} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}, \quad \{U_S\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad \text{d'où} \quad \{U\} = \begin{Bmatrix} \{U_L\} \\ \{U_S\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ v_3 \\ u_1 \\ v_1 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

On en déduit la localisation des degrés de liberté dans les matrices globales :

$$\{DDL\} = \begin{Bmatrix} u_1 \rightarrow 0 \\ v_1 \rightarrow 0 \\ u_2 \rightarrow 1 \\ v_2 \rightarrow 2 \\ u_3 \rightarrow 0 \\ v_3 \rightarrow 3 \end{Bmatrix}$$

### 2.3 Étude élémentaire

– coordonnées nodales :

nœud	$x$	$y$
1	0	$L$
2	$L$	0
3	0	$-L$

– élément 1  $\rightarrow$  2 :

caractéristiques :  $L\sqrt{2}$ ,  $A$ ,  $E$ ,  $n_x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $n_y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\{ddl_{1-2}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \rightarrow 0 \\ v_1 \rightarrow 0 \\ u_2 \rightarrow 1 \\ v_2 \rightarrow 2 \end{Bmatrix}, \quad [k_{1-2}] = \frac{EA}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

– élément 3  $\rightarrow$  1 :

caractéristiques :  $2L$ ,  $A$ ,  $E$ ,  $n_x = 0$ ,  $n_y = 1$

$$\{ddl_{3-1}\} = \begin{Bmatrix} u_3 \rightarrow 0 \\ v_3 \rightarrow 3 \\ u_1 \rightarrow 0 \\ v_1 \rightarrow 0 \end{Bmatrix}, \quad [k_{3-1}] = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

– élément 3  $\rightarrow$  2 :

caractéristiques :  $L\sqrt{2}$ ,  $A$ ,  $E$ ,  $n_x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $n_y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\{ddl_{3-2}\} = \begin{Bmatrix} u_3 \rightarrow 0 \\ v_3 \rightarrow 3 \\ u_2 \rightarrow 1 \\ v_2 \rightarrow 2 \end{Bmatrix}, \quad [k_{3-2}] = \frac{EA}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

### 2.4 Assemblage et calcul des déplacements inconnus

Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation  $[K_{LL}]\{U_L\} = \{F_{\text{nod},L}\}$  :

$$\frac{EA}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 + \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

d'où (programme **exemple\_1**) :

$$u_2 = \frac{PL}{2EA} = -0.050 \text{ mm}, \quad v_2 = \frac{PL}{2EA}(1 + 2\sqrt{2}) = -0.191 \text{ mm}$$

$$v_3 = \frac{PL}{EA} = -0.100 \text{ mm}$$

### 2.5 Efforts normaux dans les éléments

Ils sont calculés à l'aide de la formule (1.8) :

$$N_{1-2} = \frac{EA}{L\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} u_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} v_2 \right) = -\frac{P\sqrt{2}}{2} = 7071 \text{ N}$$

$$N_{3-1} = \frac{EA}{2L} (-v_3) = -\frac{P}{2} = 5000 \text{ N}$$

$$N_{3-2} = \frac{EA}{L\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} u_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} (v_2 - v_3) \right) = \frac{P\sqrt{2}}{2} = -7071 \text{ N}$$

## 2.6 Actions de liaison

Les actions de liaisons sont calculées à partir des efforts normaux (équation 1.2) :

– nœud 1 :

$$\vec{F}_1 = -N_{1-2} \vec{n}_{1-2} + N_{3-1} \vec{n}_{3-1} \quad \text{d'où}$$

$$F_{1x} = -\frac{1}{\sqrt{2}} N_{1-2} = \frac{P}{2} = -5000 \text{ N} \quad , \quad F_{1y} = \frac{1}{\sqrt{2}} N_{1-2} + N_{3-1} = -P = 10000 \text{ N}$$

– nœud 3 :

$$\vec{F}_3 = -N_{3-1} \vec{n}_{3-1} - N_{3-2} \vec{n}_{3-2} \quad \text{d'où}$$

$$F_{3x} = -\frac{1}{\sqrt{2}} N_{3-2} = -\frac{P}{2} = 5000 \text{ N}$$

*Remarque* : l'équilibre de la structure est vérifié :

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0 \quad , \quad F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 0 \quad , \quad -2LF_{1x} - LF_{2x} + LF_{2y} = 0$$

## 3 Exemple 2 : treillis soumis à une force nodale

### 3.1 Énoncé

Le treillis plan représenté sur la figure 5 est composé de trois poutres de même section.

Soient  $E$  le module de Young du matériau et  $A$  l'aire des sections droites.

Le nœud 1 est articulé et le nœud 2 repose sur un appui simple dont la normale est horizontale.

Le nœud 3 porte une charge d'intensité  $(P, 3P, 0)$ .

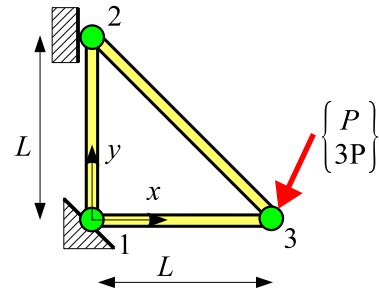


Figure 5 – Exemple 2

**Application numérique** : on donne :

$$A = 100 \text{ cm}^2 \quad , \quad E = 200000 \text{ MPa} \quad , \quad L = 0.7 \text{ m} \quad , \quad P = -120 \text{ kN}$$

### 3.2 Partition des degrés de liberté

Effectuons une partition des degrés de liberté en déplacements connus et inconnus ( $[1]$ ,  $[12]$ ) :

$$\{U_L\} = \begin{Bmatrix} v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad , \quad \{U_S\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \text{d'où} \quad \{U\} = \begin{Bmatrix} \{U_L\} \\ \{U_S\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_1 \\ v_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$



On en déduit la localisation des degrés de liberté dans les matrices globales :

$$\{DDL\} = \begin{Bmatrix} u_1 \rightarrow 0 \\ v_1 \rightarrow 0 \\ u_2 \rightarrow 0 \\ v_2 \rightarrow 1 \\ u_3 \rightarrow 2 \\ v_3 \rightarrow 3 \end{Bmatrix}$$

### 3.3 Étude élémentaire

– coordonnées nodales :

nœud	$x$	$y$
1	0	0
2	0	$L$
3	$L$	0

– élément 1  $\rightarrow$  2 :

caractéristiques :  $L$ ,  $A$ ,  $E$ ,  $n_x = 0$ ,  $n_y = 1$

$$\{ddl_{1-2}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \rightarrow 0 \\ v_1 \rightarrow 0 \\ u_2 \rightarrow 0 \\ v_2 \rightarrow 1 \end{Bmatrix}, \quad [k_{1-2}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

– élément 1  $\rightarrow$  3 :

caractéristiques :  $L$ ,  $A$ ,  $E$ ,  $n_x = 1$ ,  $n_y = 0$

$$\{ddl_{1-3}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \rightarrow 0 \\ v_1 \rightarrow 0 \\ u_3 \rightarrow 2 \\ v_3 \rightarrow 3 \end{Bmatrix}, \quad [k_{1-3}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

– élément 2  $\rightarrow$  3 :

caractéristiques :  $L\sqrt{2}$ ,  $A$ ,  $E$ ,  $n_x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $n_y = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$$\{ddl_{2-3}\} = \begin{Bmatrix} u_2 \rightarrow 0 \\ v_2 \rightarrow 1 \\ u_3 \rightarrow 2 \\ v_3 \rightarrow 3 \end{Bmatrix}, \quad [k_{2-3}] = \frac{EA}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3.4 Assemblage et calcul des déplacements inconnus

Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation  $[K_{LL}]\{U_L\} = \{F_{nod,L}\}$  :

$$\frac{EA}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1+2\sqrt{2} & 1 & -1 \\ 1 & 1+2\sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ 3P \end{Bmatrix}$$

d'où (programme **exemple\_2**) :

$$v_2 = \frac{3PL}{EA} = -0.126 \text{ mm}$$

$$u_3 = \frac{4PL}{EA} = -0.168 \text{ mm}, \quad v_3 = \frac{(7+6\sqrt{2})PL}{EA} = -0.650 \text{ mm}$$

### 3.5 Efforts normaux dans les éléments

Ils sont calculés à l'aide de la formule (1.8) :

$$N_{1-2} = \frac{EA}{L} v_2 = 3P = -360 \text{ kN}$$

$$N_{1-3} = \frac{EA}{L} u_3 = 4P = -480 \text{ kN}$$

$$N_{2-3} = \frac{EA}{L\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} u_3 - \frac{1}{\sqrt{2}} (v_3 - v_2) \right) = -3\sqrt{2}P = 509 \text{ kN}$$

### 3.6 Actions de liaison

Les actions de liaisons sont calculées à partir des efforts normaux (équation 1.2) :

– nœud 1 :

$$\vec{F}_1 = -N_{1-2} \vec{n}_{1-2} - N_{1-3} \vec{n}_{1-3} \quad \text{d'où}$$

$$F_{1x} = -N_{1-3} = -4P = 480 \text{ kN} \quad , \quad F_{1y} = -N_{1-2} = -3P = 360 \text{ kN}$$

– nœud 2 :

$$\vec{F}_2 = N_{1-2} \vec{n}_{1-2} - N_{2-3} \vec{n}_{2-3} \quad \text{d'où}$$

$$F_{2x} = -\frac{1}{\sqrt{2}} N_{2-3} = 3P = -360 \text{ kN}$$

*Remarque* : l'équilibre de la structure est vérifié :

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0 \quad , \quad F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 0 \quad , \quad LF_{3y} - LF_{2x} = 0$$

## 4 Exemple 3 : treillis soumis à une variation de température

### 4.1 Énoncé

Le treillis plan à nœuds articulés représenté sur la figure 6 est composé de trois poutres de même matériau et de même section droite.

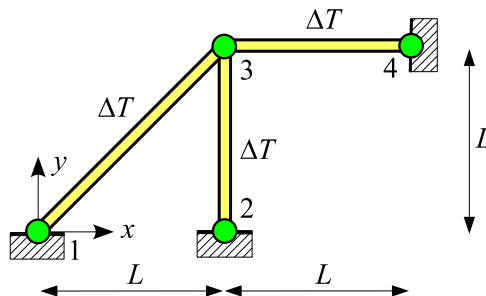


Figure 6 – Exemple 3

Soient  $E$  et  $\alpha$  respectivement le module de Young et le coefficient de dilatation du matériau.

Soit  $A$  l'aire des sections droites.

Les nœuds 1, 2 et 4 sont liés à l'extérieur par une rotule.

**Premier cas de charge** : la structure est soumise à une variation de température  $\Delta T$ .

**Deuxième cas de charge** : la poutre (2 – 3) est soumise à une variation de température  $\Delta T$ .

**Application numérique** : on donne :

$$A = 100 \text{ mm}^2, L = 0.1 \text{ m}, E = 200000 \text{ MPa}, \alpha = 10^{-5} \text{ K}^{-1}, \Delta T = 100 \text{ K}$$

## 4.2 Partition des degrés de liberté

Effectuons une partition des degrés de liberté en déplacements connus et inconnus ([1], [12]) :

$$\{U_L\} = \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}, \quad \{U_S\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad \text{d'où} \quad \{U\} = \begin{Bmatrix} \{U_L\} \\ \{U_S\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

On en déduit la localisation des degrés de liberté dans les matrices globales :

$$\{DDL\} = \begin{Bmatrix} u_1 \rightarrow 0 \\ v_1 \rightarrow 0 \\ u_2 \rightarrow 0 \\ v_2 \rightarrow 0 \\ u_3 \rightarrow 1 \\ v_3 \rightarrow 2 \\ u_4 \rightarrow 0 \\ v_4 \rightarrow 0 \end{Bmatrix}$$

## 4.3 Étude élémentaire

– coordonnées nodales :

nœud	$x$	$y$
1	0	0
2	$L$	0
3	$L$	$L$
4	$2L$	$L$

– élément 1 → 3 :

$$\text{caractéristiques} : L\sqrt{2}, A, E, \alpha, n_x = \frac{1}{\sqrt{2}}, n_y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\{ddl_{1-3}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \rightarrow 0 \\ v_1 \rightarrow 0 \\ u_3 \rightarrow 1 \\ v_3 \rightarrow 2 \end{Bmatrix} \quad [k_{1-3}] = \frac{EA}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \{f_{th,1-3}\} = \frac{1}{\sqrt{2}} EA \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

– élément 2 → 3 :

$$\text{caractéristiques} : L, A, E, \alpha, n_x = 0, n_y = 1$$

$$\{ddl_{2-3}\} = \begin{Bmatrix} u_2 \rightarrow 0 \\ v_2 \rightarrow 0 \\ u_3 \rightarrow 1 \\ v_3 \rightarrow 2 \end{Bmatrix} \quad [k_{2-3}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \{f_{th,2-3}\} = EA \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

– élément 3 → 4 :

caractéristiques :  $L$  ,  $A$  ,  $E$  ,  $\alpha$  ,  $n_x = 1$  ,  $n_y = 0$

$$\{ddl_{3-4}\} = \begin{Bmatrix} u_3 \rightarrow 1 \\ v_3 \rightarrow 2 \\ u_4 \rightarrow 0 \\ v_4 \rightarrow 0 \end{Bmatrix} \quad [k_{3-4}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \{f_{th,3-4}\} = EA \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

## 4.4 Premier cas de charge

### 4.4.1 Assemblage et calcul des déplacements inconnus

Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation  $[K_{LL}]\{U_L\} = \{F_{th,L}\}$  :

$$\frac{EA}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1 + 2\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 + 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} EA \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} \sqrt{2} - 2 \\ \sqrt{2} + 2 \end{Bmatrix}$$

d'où (programme **exemple\_3**) :

$$u_3 = (\sqrt{2} - 2) L \alpha \Delta T = -0.0586 \text{ mm} \quad , \quad v_3 = \sqrt{2} L \alpha \Delta T = 0.1414 \text{ mm}$$

### 4.4.2 Efforts normaux dans les éléments

Ils sont calculés à l'aide de la formule (1.8) :

$$N_{1-3} = \frac{EA}{L\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} u_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} v_3 \right) - EA \alpha \Delta T = (\sqrt{2} - 2) EA \alpha \Delta T = -11716 \text{ N}$$

$$N_{2-3} = \frac{EA}{L} v_3 - EA \alpha \Delta T = (\sqrt{2} - 1) EA \alpha \Delta T = 8284 \text{ N}$$

$$N_{3-4} = \frac{EA}{L} (-u_3) - EA \alpha \Delta T = (1 - \sqrt{2}) EA \alpha \Delta T = -8284 \text{ N}$$

### 4.4.3 Actions de liaison

Les actions de liaisons sont calculées à partir des efforts normaux (équation 1.2) :

– nœud 1 :

$$\vec{F}_1 = -N_{1-3} \vec{n}_{1-3} \quad \text{d'où :}$$

$$F_{1x} = -\frac{1}{\sqrt{2}} N_{1-3} = (\sqrt{2} - 1) EA \alpha \Delta T = 8284 \text{ N} \quad , \quad F_{1y} = F_{1x} = 8284 \text{ N}$$

– nœud 2 :

$$\vec{F}_2 = -N_{2-3} \vec{n}_{2-3} \quad \text{d'où :}$$

$$F_{2x} = 0 \quad , \quad F_{2y} = -N_{2-3} = (1 - \sqrt{2}) EA \alpha \Delta T = -8284 \text{ N}$$

– nœud 4 :

$$\vec{F}_4 = N_{3-4} \vec{n}_{3-4} \quad \text{d'où :}$$

$$F_{4x} = N_{3-4} = (1 - \sqrt{2}) EA \alpha \Delta T = -8284 \text{ N} \quad , \quad F_{4y} = 0$$

*Remarque* : l'équilibre de la structure est vérifié :

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{4x} = 0 \quad , \quad F_{1y} + F_{2y} + F_{4y} = 0 \quad , \quad L F_{2y} - L F_{4x} = 0$$

## 4.5 Deuxième cas de charge

### 4.5.1 Assemblage et calcul des déplacements inconnus

Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation  $[K_{LL}]\{U_L\} = \{F_L\}$  :

$$\frac{EA}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1+2\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1+2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = EA\alpha\Delta T \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

d'où (programme **exemple\_3**) :

$$u_3 = \frac{1-\sqrt{2}}{2} L\alpha\Delta T = -0.0207 \text{ mm} \quad , \quad v_3 = \frac{3-\sqrt{2}}{2} L\alpha\Delta T = 0.0793 \text{ mm}$$

### 4.5.2 Efforts normaux dans les éléments

Ils sont calculés à l'aide de la formule (1.8) :

$$N_{1-3} = \frac{EA}{L\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} u_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} v_3 \right) = \frac{2-\sqrt{2}}{2} EA\alpha\Delta T = 5858 \text{ N}$$

$$N_{2-3} = \frac{EA}{L} v_3 - EA\alpha\Delta T = \frac{1-\sqrt{2}}{2} EA\alpha\Delta T = -4142 \text{ N}$$

$$N_{3-4} = \frac{EA}{L} (-u_3) = \frac{\sqrt{2}-1}{2} EA\alpha\Delta T = 4142 \text{ N}$$

### 4.5.3 Actions de liaison

Les actions de liaisons sont calculées à partir des efforts normaux (équation 1.2) :

– nœud 1 :

$$\vec{F}_1 = -N_{1-3} \vec{n}_{1-3} \quad \text{d'où :}$$

$$F_{1x} = -\frac{1}{\sqrt{2}} N_{1-3} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} EA\alpha\Delta T = -4142 \text{ N} \quad , \quad F_{1y} = F_{1x} = -4142 \text{ N}$$

– nœud 2 :

$$\vec{F}_2 = -N_{2-3} \vec{n}_{2-3} \quad \text{d'où :}$$

$$F_{2x} = 0 \quad , \quad F_{2y} = -N_{2-3} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} EA\alpha\Delta T = 4142 \text{ N}$$

– nœud 4 :

$$\vec{F}_4 = N_{3-4} \vec{n}_{3-4} \quad \text{d'où :}$$

$$F_{4x} = N_{3-4} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} EA\alpha\Delta T = 4142 \text{ N} \quad , \quad F_{4y} = 0$$

*Remarque* : l'équilibre de la structure est vérifié :

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{4x} = 0 \quad , \quad F_{1y} + F_{2y} + F_{4y} = 0 \quad , \quad L F_{2y} - L F_{4x} = 0$$

## 5 Programmes Maple

Les programmes suivant se trouvent dans le fichier **treillis.txt**.

### 5.1 tre\_mat

```
# calculs élémentaires
restart:with(linalg):

# allongement unitaire
eps:=(nx*(uj-ui)+ny*(vj-vi))/L;

# énergie de déformation
Edef:=EA*eps^2*L/2-eps*EA*alpha*DT*L;

# matrice de rigidité
k:=hessian(Edef,[ui,vi,uj,vj]);

# efforts nodaux
fnod:=grad(Edef,[ui,vi,uj,vj]);

# remarque
k:=jacobian(fnod,[ui,vi,uj,vj]);

# vecteur dû au gradient thermique
fth:=-jacobian(fnod,[DT]);
```

### 5.2 exemple\_1

```
restart:with(linalg):

# application numérique

#L:=200;E:=200000;A:=Pi*30^2/4;P:=-10000;

# matrice de rigidité

KL:=matrix([[2,0,-1],[0,2,-1],[-1,-1,1+sqrt(2)]]):
KL:=scalarmul(KL,E*A/2/sqrt(2)/L);

# vecteur FL

FL:=vector([0,P,0]);

# calcul des déplacements nodaux

UL:=linsolve(KL,FL);

#evalf(%);
```

### 5.3 exemple\_2

```

restart:with(linalg):

# application numérique

# L:=700;E:=200000;A:=10000;P:=-120e3;

# matrice de rigidité
KL:=matrix([[1+2*sqrt(2),1,-1],[1,1+2*sqrt(2),-1],[-1,-1,1]]):
KL:=scalarmul(KL,E*A/2/sqrt(2)/L);

# vecteur FL
FL:=vector([0,P,3*P]);

# calcul des déplacements nodaux
UL:=linsolve(KL,FL);
#evalf(%);

```

### 5.4 exemple\_3

```

restart:with(linalg):

# application numérique

#L:=100;E:=200000;A:=100;alpha:=1e-5;DT:=100;

# matrice de rigidité

x:=1+2*sqrt(2):
KL:=matrix([[x,1],[1,x]]):
KL:=scalarmul(KL,E*A/2/sqrt(2)/L);

# vecteurs F
x:=E*A*alpha*DT/2:
FLcas1:=vector([(sqrt(2)-2)*x,(sqrt(2)+2)*x]);
FLcas2:=vector([0,E*A*alpha*DT]);

# calcul des déplacements nodaux

ULcas1:=linsolve(KL,FLcas1);
ULcas2:=linsolve(KL,FLcas2);

# map(evalf,ULcas1);
# map(evalf,ULcas2);

```

## Références

- [1] J. H. ARGYRIS et H.-P. MLEJNEK – *Die methode der finiten elemente, Band I. Verschiebungsmethode in der statik*, Vieweg, 1986.
- [2] J.-L. BATOZ et G. DHATT – *Modélisation des structures par éléments finis, Volume 1. Solides élastiques*, Hermès, 1990.
- [3] — , *Modélisation des structures par éléments finis, Volume 2. Poutres et plaques*, Hermès, 1990.
- [4] A. BAZERGUI, T. BUI-QUOC, A. BIRON, G. MCINTYRE et C. LABERGE – *Résistance des matériaux*, 3 éd., Éditions de l'École Polytechnique de Montréal, 2002.
- [5] L. CHEVALIER – *Mécanique des systèmes et des milieux déformables. Cours, exercices et problèmes corrigés*, Ellipses, 2004.
- [6] G. DHATT, G. TOUZOT et E. LEFRANÇOIS – *Méthode des éléments finis*, Hermès, 2005.
- [7] F. FREY – *Traité du génie civil, Volume 1. Analyse des structures et milieux continus. Statique appliquée*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1998.
- [8] — , *Traité du génie civil, Volume 2. Analyse des structures et milieux continus. Mécanique des structures*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2000.
- [9] F. FREY et J. JIROUSEK – *Traité du génie civil, Volume 6. Méthode des éléments finis*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2001.
- [10] D. GAY et J. GAMBELIN – *Une approche simple du calcul des structures par la méthode des éléments finis*, Hermès, 1989.
- [11] — , *Dimensionnement des structures. Une introduction*, Hermès, 1999.
- [12] J.-F. IMBERT – *Analyse des structures par éléments finis*, 3 éd., Cépaduès, 1995.
- [13] S. LAROZE – *Mécanique des structures, Tome 2. Théorie des poutres*, 2 éd., Eyrolles/Masson, 1988.
- [14] A. PORTELA et A. CHARAFI – *Finite elements using Maple. A Symbolic Programming Approach*, Springer, 2002.
- [15] J. S. PRZEMIENIECKI – *Theory of matrix structural analysis*, Dover, 1986.
- [16] W. WEAVER et J. M. GERE – *Matrix analysis of framed structures*, 3 éd., Van Nostrand Reinhold, 1990.
- [17] C. WIELGOZ – *Cours et exercices de résistance des matériaux : élasticité, plasticité, éléments finis*, Ellipses, 1999.
- [18] W. WUNDERLICH et W. D. PILKEY – *Mechanics of structures. Variational and computational methods*, 2 éd., CRC PRESS, 2003.