

Méthode des éléments finis : poutre soumise à un effort normal

Yves Debard

Institut Universitaire de Technologie du Mans
Département Génie Mécanique et Productique

<http://iut.univ-lemans.fr/ydlogi/index.html>

24 mars 2006 – 29 mars 2011

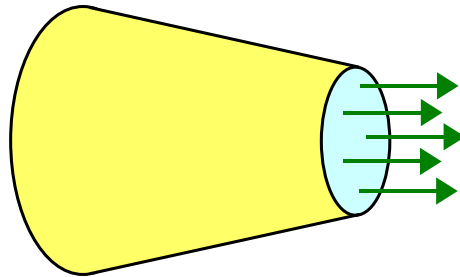


Table des matières

1	Rappels	1
2	Matrices élémentaires	2
2.1	Matrice de rigidité et vecteur force	2
2.1.1	Introduction	2
2.1.2	Élément de poutre à section constante	3
2.2	Utilisation des fonctions d'interpolation	4
2.2.1	Fonctions d'interpolation	4
2.2.2	Matrices élémentaires	4
2.2.3	Élément de poutre à section constante	6
2.2.4	Élément de poutre à section variable	6
2.3	Partition du champ de déplacements en mouvement de corps rigide et mouvement de déformation pure	6
2.3.1	Partition du champ de déplacements	6
2.3.2	Fonctions d'interpolation	7
2.3.3	Calcul de la matrice de rigidité	7
2.3.4	Calcul du vecteur force	7
2.3.5	Calcul de la matrice de masse	8
2.3.6	Calcul de k_D , $f_{th,D}$ et f_D à l'aide du théorème de Castigliano	8
3	Exemples	9
3.1	Exemple 1 : poutre soumise à des forces nodales	9
3.1.1	Énoncé	9
3.1.2	Discrétisation de la poutre et partition des degrés de liberté	9
3.1.3	Étude élémentaire	9
3.1.4	Assemblage et calcul des déplacements inconnus	10
3.1.5	Efforts et déplacements élémentaires	10
3.1.6	Actions de liaison	10
3.1.7	Représentations graphiques	11
3.2	Exemple 2 : poutre soumise à des forces réparties	11
3.2.1	Énoncé	11
3.2.2	Discrétisation de la poutre et partition des degrés de liberté	11
3.2.3	Étude élémentaire	12
3.2.4	Assemblage et calcul des déplacements inconnus	12
3.2.5	Efforts et déplacements élémentaires	12
3.2.6	Action de liaison	13
3.2.7	Représentations graphiques	13
3.3	Exemple 3 : poutre soumise à des forces réparties	13
3.3.1	Énoncé	13
3.3.2	Discrétisation de la poutre et partition des degrés de liberté	14
3.3.3	Étude élémentaire	14
3.3.4	Assemblage et calcul des déplacements inconnus	14
3.3.5	Efforts et déplacements élémentaires	14
3.3.6	Action de liaison	15
3.3.7	Représentations graphiques	15
3.4	Exemple 4 : poutre soumise à un gradient thermique	16
3.4.1	Énoncé	16
3.4.2	Discrétisation de la poutre et partition des degrés de liberté	16
3.4.3	Étude élémentaire	16
3.4.4	Assemblage et calcul du déplacement inconnu	17

3.4.5	Efforts et déplacements élémentaires	17
3.4.6	Actions de liaison	17
3.4.7	Représentations graphiques	17
3.4.8	Application numérique	18
3.5	Exemple 5 : problème à déplacement imposé	18
3.5.1	Énoncé	18
3.5.2	Discrétisation de la poutre et partition des degrés de liberté	18
3.5.3	Étude élémentaire	18
3.5.4	Assemblage et calcul des déplacements inconnus	19
3.5.5	Effort normal et actions de liaisons	19
3.6	Exemple 6 : poutre reposant sur deux appuis élastiques	19
3.6.1	Énoncé	19
3.6.2	Matrices élémentaires	19
3.6.3	Assemblage	20
3.6.4	Déplacements	20
3.7	Exemple 7 : modes propres	20
3.7.1	Énoncé	20
3.7.2	Discrétisation de la poutre et partition des degrés de liberté	20
3.7.3	Étude élémentaire	21
3.7.4	Assemblage et calcul	21
3.7.5	Remarque : influence de la discrétisation	21
3.8	Élément de poutre à section variable	22
3.8.1	Méthode du paragraphe 2.1.2	22
3.8.2	Utilisation des fonctions d'interpolation	22
3.8.3	Utilisation du théorème de Castigliano	23
4	Programmes Maple	23
4.1	mat_elem1	23
4.2	mat_elem2	24
4.3	mat_var1	24
4.4	mat_var2	25
4.5	mat_var3	26
	Références	27

1 Rappels

Considérons une poutre droite d'axe x soumise à un effort normal $N(x; t)$.

$u(x; t)$ est le déplacement suivant x de la section droite d'abscisse x à l'instant t .

A est l'aire de la section droite.

E , α et ρ sont respectivement le module de Young, le coefficient de dilatation et la masse volumique du matériau.

La poutre porte une force répartie d'intensité linéique p_x et subit une variation de température ΔT .

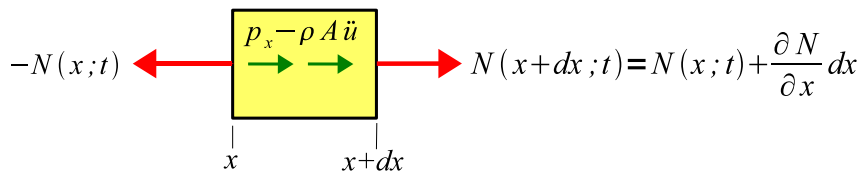


Figure 1 - Équilibre d'un tronçon de poutre infiniment petit

L'équilibre du morceau de poutre compris entre les sections droites d'abscisses x et $x + dx$ s'écrit :

$$-N(x; t) + N(x + dx; t) + p_x dx = -N(x; t) + N(x; t) + \frac{\partial N}{\partial x} dx + p_x dx = \rho A \ddot{u} dx \quad (1.1)$$

où l'on a posé : $\ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

Après simplification, on obtient l'équation d'équilibre :

$$\frac{\partial N}{\partial x} + p_x = \rho A \ddot{u} \quad (1.2)$$

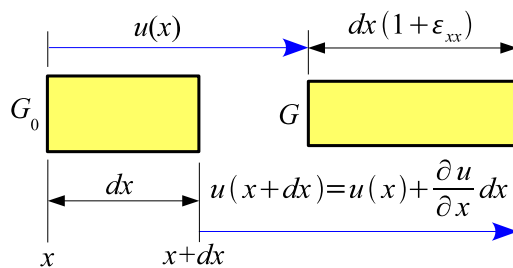


Figure 2 - transformation d'un tronçon de poutre

L'allongement unitaire ϵ_{xx} est (figure 2) :

$$\epsilon_{xx} = \frac{u(x + dx) - u(x)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.3)$$

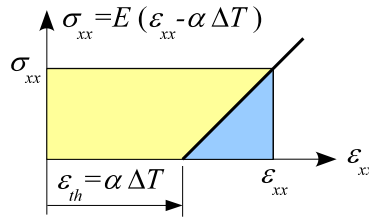


Figure 3 – Loi de comportement

Il est dû à l'effort normal (loi de Hooke) et à la variation de température (figure 3) :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma_{xx}}{E} + \alpha \Delta T \quad \text{avec} \quad \sigma_{xx} = \frac{N}{A} \quad (1.4)$$

d'où :

$$\sigma_{xx} = E(\varepsilon_{xx} - \alpha \Delta T) = E(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{th}) \quad (1.5)$$

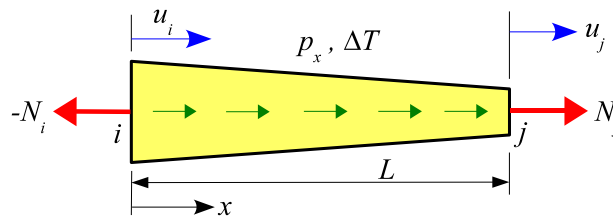
avec $\varepsilon_{th} = \alpha \Delta T$.

2 Matrices élémentaires

2.1 Matrice de rigidité et vecteur force

2.1.1 Introduction

Considérons un tronçon de poutre droite de longueur L (**élément**) limité par les sections droites de centre de gravité i et j (**nœuds**).



$u_i = u(0)$ et $u_j = u(L)$ sont les déplacements nodaux.

$-N(0) = -N_i$ et $N(L) = N_j$ sont les efforts nodaux.

L'élément porte répartie d'intensité linéique $p_x(x)$ et subit une variation de température ΔT .

En l'absence de forces d'inertie, l'équation d'équilibre (1.2) se réduit à :

$$\frac{dN}{dx} + p_x = 0 \quad (2.1)$$

L'intégration de cette équation entre les abscisses 0 et x conduit à l'expression de l'effort normal dans l'élément :

$$N(x) = N_i - \int_0^x p_x(s) ds \quad (2.2)$$

L'intégration de la relation de comportement (1.4) donne la déformée :

$$u(x) = u_i + \int_0^x \frac{N(s)}{EA} ds + \int_0^x \alpha \Delta T ds \quad (2.3)$$

Des conditions aux limites :

$$u_j = u(L) \quad \text{et} \quad N_j = N(L)$$

on déduit l'expression des efforts nodaux en fonction des déplacements nodaux :

$$\{f_{\text{nod}}\} = [k] \{u\} - \{f\} - \{f_{\text{th}}\} \quad (2.4)$$

avec

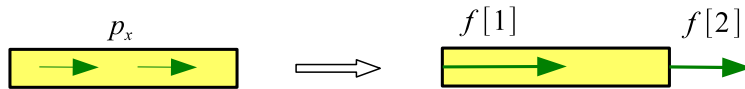
$$\{f_{\text{nod}}\} = \begin{Bmatrix} -N(0) \\ N(L) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -N_i \\ N_j \end{Bmatrix}, \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

$\{f_{\text{nod}}\}$ est le **vecteur des forces nodales** (N).

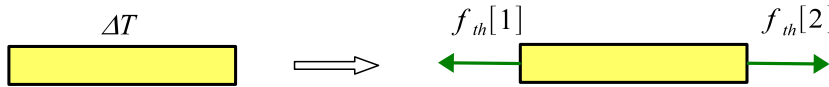
$[k]$ est la **matrice de rigidité élémentaire** (N/m).

$\{u\}$ est le **vecteur déplacement élémentaire** (m).

$\{f\}$ est le **vecteur force équivalent aux charges réparties** (N).



$\{f_{\text{th}}\}$ est le **vecteur force équivalent au gradient thermique** (N).



2.1.2 Élément de poutre à section constante

L'élément de poutre droite ($i - j$) de section droite constante, est soumis sur toute sa longueur une force linéairement répartie d'intensité linéique :

$$p_x(x) = p_{xi} + (p_{xj} - p_{xi}) \frac{x}{L} \quad (2.6)$$

et à une variation de température ΔT constante.

L'équilibre de l'élément s'écrit :

$$-N_i + N_j + \frac{L}{2} (p_{xi} + p_{xj}) = 0 \quad (2.7)$$

La relation $\{f_{\text{nod}}\} = [k] \{u\} - \{f\} - \{f_{\text{th}}\}$ s'écrit (programme : **mat_elem1**) :

$$\begin{Bmatrix} -N_i \\ N_j \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} - \frac{L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{xi} \\ p_{xj} \end{Bmatrix} - EA \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

L'effort normal et le champ de déplacements sont :

$$N(x) = N_i - p_{xi} x - (p_{xj} - p_{xi}) \frac{x^2}{2L} \quad (2.9)$$

$$u(x) = u_i + \frac{1}{EA} \left(N_i x - p_{xi} \frac{x^2}{2} - (p_{xj} - p_{xi}) \frac{x^3}{6L} \right) + \alpha \Delta T x \quad (2.10)$$

Cas particulier : si le chargement se réduit à une force uniformément répartie :

$$p_{xi} = p_{xj} = p$$

les relations ci-dessus deviennent :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} -N_i \\ N_j \end{Bmatrix} &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} - \frac{pL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - EA \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ N(x) = N_i - p_{xi} x \quad , \quad u(x) &= u_i + \frac{1}{EA} \left(N_i x - p_{xi} \frac{x^2}{2} \right) + \alpha \Delta T x \end{aligned}$$

2.2 Utilisation des fonctions d'interpolation

2.2.1 Fonctions d'interpolation

Le champ de déplacements $u(x)$ est représenté par le polynôme :

$$u(x) = a_0 + a_1 x \quad (2.11)$$

avec les conditions aux limites $u_i = u(0)$ et $u_j = u(L)$, d'où l'expression de $u(x)$ en fonction des déplacements nodaux :

$$u(x) = [N_u] \{u\} = [N_1(x) \quad N_2(x)] \{u\} \quad (2.12)$$

avec

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad , \quad N_2(x) = \frac{x}{L} \quad , \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

$N_1(x)$ et $N_2(x)$ sont les fonctions d'interpolation.

Remarque : le champ de déplacements s'écrit sous forme paramétrique :

$$\begin{cases} x(\xi) = \frac{1+\xi}{2} L \quad , \quad -1 \leq \xi \leq 1 \\ u(\xi) = [N_u(\xi)] \{u\} \end{cases} \quad (2.14a)$$

avec

$$[N_u] = \begin{bmatrix} \frac{1-\xi}{2} & \frac{1+\xi}{2} \end{bmatrix} \quad (2.14b)$$

et les relations

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi = J d\xi = \frac{L}{2} d\xi \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial f}{\partial \xi} \quad , \quad \int_0^L f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x(\xi)) J d\xi \quad (2.14c)$$

J est le jacobien de la transformation géométrique $x(\xi)$.

2.2.2 Matrices élémentaires

L'énergie de déformation est égale à (à une constante près indépendante des déplacements) :

$$E_{\text{def}} = \int_V \left(\frac{1}{2} E \varepsilon_{xx}^2 - E \varepsilon_{xx} \alpha \Delta T \right) dV \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.15)$$

En utilisant la relation :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u(x)}{\partial x} = \left[\frac{dN_u}{dx} \right] \{u\} = [B] \{u\} = \{u\}^T [B]^T \quad \text{avec} \quad [B] = \frac{1}{L} [-1 \quad 1] \quad (2.16)$$

il vient :

$$E_{\text{def}} = \frac{1}{2} \{u\}^T [k] \{u\} - \{u\}^T \{f_{\text{th}}\} \quad (2.17)$$

où la matrice de rigidité $[k]$ et le vecteur $\{f_{\text{th}}\}$ sont égaux à :

$$[k] = \int_0^L EA [B]^T [B] dx \quad , \quad \{f_{\text{th}}\} = \int_0^L EA \alpha \Delta T [B]^T dx \quad (2.18)$$

Le travail des forces extérieures pour le déplacement $u(x)$ est égal à :

$$W_{\text{ext}} = \int_0^L u(x) p_x(x) dx + \{u\}^T \{f_{\text{nod}}\} = \{u\}^T \{f\} + \{u\}^T \{f_{\text{nod}}\} \quad (2.19)$$

où le vecteur force est égal à :

$$\{f\} = \int_0^L [N]^T p_x(x) dx \quad (2.20)$$

L'énergie potentielle est égale à :

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{def}} - W_{\text{ext}} \quad (2.21)$$

L'énergie cinétique est égale à :

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u}^2 dV \quad \text{avec} \quad \dot{u}(x) = [N_u] \{\dot{u}\} \quad (2.22)$$

d'où :

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \dot{u}^2 dx = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^T [m] \{\dot{u}\} \quad (2.23)$$

où la matrice de masse $[m]$ est égale à :

$$[m] = \int_0^L \rho A [N_u]^T [N_u] dx \quad (2.24)$$

Le principe de Hamilton :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (E_{\text{cin}} - E_{\text{pot}}) dt = 0 \quad \forall \{\delta u\} \quad \text{avec} \quad \{\delta u\}|_{t=t_1} = \{\delta u\}|_{t=t_2} = 0 \quad (2.25)$$

conduit aux équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{\text{cin}}}{\partial \dot{u}_i} \right) + \frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial u_i} - \frac{\partial W_{\text{ext}}}{\partial u_i} = 0 \quad i = 1, 2 \quad (2.26)$$

soit sous forme matricielle :

$$\{f_{\text{nod}}\} = [m] \{\ddot{u}\} + [k] \{u\} - \{f\} - \{f_{\text{th}}\} \quad (2.27)$$

Remarque : la matrice de rigidité est la matrice hessienne de l'énergie de déformation par rapport aux déplacements nodaux :

$$k_{ij} = \frac{\partial^2 E_{\text{def}}}{\partial u_i \partial u_j} \quad (2.28)$$

2.2.3 Élément de poutre à section constante

Les données sont celles du paragraphe 2.1.2. On obtient (programme : **mat_elem2**) la même matrice de rigidité et le même vecteur force. De plus, cette méthode fournit la matrice de masse :

$$\begin{aligned} [k] &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [m] = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \{f\} &= \frac{L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{xi} \\ p_{xj} \end{Bmatrix}, \quad \{f_{th}\} = EA\alpha\Delta T \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.29)$$

2.2.4 Élément de poutre à section variable

Les matrices $[k]$ et $[m]$ et les vecteurs $\{f\}$ et $\{f_{th}\}$ sont évalués numériquement par la **méthode de Gauss** [4, 11, 13, 16] :

$$\int_0^L g(x) dx = \frac{L}{2} \int_{-1}^1 g\left(\frac{1+\xi}{2}L\right) d\xi \approx \frac{L}{2} \sum_{i=1}^{npi} w_i g\left(\frac{1+\xi_i}{2}L\right) \quad (2.30)$$

où npi , w_i et ξ_i sont respectivement le nombre de points d'intégration, le poids et l'abscisse du i^e point d'intégration (table 1).

npi	ξ_i	w_i
1	0	2
2	$\pm 0.57735026918962576 \left(\pm \sqrt{1/3}\right)$	1
3	0 $\pm 0.77459666924148338 \left(\pm \sqrt{3/5}\right)$	0.8888888888888889 (8/9) 0.5555555555555556 (5/9)

TABLE 1 – Points d'intégration et coefficients de pondération pour la méthode de Gauss

Remarque : un polynôme de degré inférieur ou égal à $2npi - 1$ est intégré exactement par la méthode de Gauss à npi points.

2.3 Partition du champ de déplacements en mouvement de corps rigide et mouvement de déformation pure

2.3.1 Partition du champ de déplacements

Le passage de l'état initial à l'état déformé peut être décomposé (figure 4) en un mouvement de corps rigide et un mouvement de déformation pure (système isostatique) [2] :

$$u(x) = \underbrace{u_i}_{\text{mouvement de corps rigide (R)}} + \underbrace{u_D(x)}_{\text{mouvement de déformation pure (D)}} \quad (2.31)$$

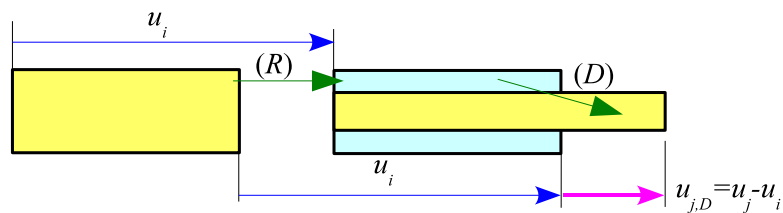


Figure 4 – Partition du champ de déplacements

Les déplacements nodaux sont :

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{j,D} \end{Bmatrix} \quad \text{où } u_{j,D} = u_D(L) \quad (2.32)$$

On en déduit par inversion :

$$u_R = u_i = [1 \quad 0] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = [a_R] \{u\} \quad (2.33)$$

$$u_D = u_{j,D} = [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = [a_D] \{u\} \quad (2.34)$$

Remarque : le système (D) est isostatique.

2.3.2 Fonctions d'interpolation

À l'aide des fonctions d'interpolation (2.14), le champ de déplacements (2.31) s'écrit sous forme paramétrique :

$$\begin{cases} x(\xi) = \frac{1+\xi}{2} L \quad (-1 \leq \xi \leq 1) \quad , \quad J = \frac{L}{2} \\ u(\xi) = u_R + N_D u_D = ([a_R] + N_D [a_D]) \{u\} \end{cases} \quad (2.35a)$$

avec :

$$N_D = \frac{1+\xi}{2} \quad , \quad B = \frac{\partial N_D}{\partial x} = \frac{1}{L} \quad (2.35b)$$

2.3.3 Calcul de la matrice de rigidité

L'énergie de déformation de l'élément est égale à l'énergie de déformation du système (D) :

$$\begin{aligned} E_{\text{def}} &= \frac{1}{2} \{u\}^T [k] \{u\} - \{u\}^T \{f_{\text{th}}\} \\ &= E_{\text{def},D} = \frac{1}{2} k_D u_D^2 - u_D f_{\text{th},D} \\ &= \frac{1}{2} \{u\}^T [a_D]^T k_D [a_D] \{u\} - \{u\}^T [a_D]^T f_{\text{th},D} \end{aligned} \quad (2.36)$$

d'où l'expression de la matrice de rigidité et du vecteur $\{f_{\text{th}}\}$:

$$[k] = k_D [a_D]^T [a_D] = k_D \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \{f_{\text{th}}\} = f_{\text{th},D} [a_D]^T = f_{\text{th},D} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

avec :

$$k_D = \int_0^L EA B^2 dx \quad , \quad f_{\text{th},D} = \int_0^L EA \alpha \Delta T B dx \quad (2.38)$$

2.3.4 Calcul du vecteur force

Le travail de $p_x(x)$ pour le déplacement $u(x)$ est égal à :

$$\int_0^L p_x(x) u(x) dx = \int_0^L (u_R + N_D u_D) p_x(x) dx = \{u\}^T ([a_R]^T f_R + [a_D]^T f_D) \quad (2.39)$$

avec

$$f_R = \int_0^L p_x(x) dx \quad , \quad f_D = \int_0^L N_D p_x(x) dx \quad (2.40)$$

On en déduit l'expression du vecteur force :

$$\{f\} = [a_R]^T f_R + [a_D]^T f_D = \begin{Bmatrix} f_R - f_D \\ f_D \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$

2.3.5 Calcul de la matrice de masse

L'énergie cinétique est égale à :

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \dot{u}^2 dx = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^T [m] \{\dot{u}\} \quad (2.42)$$

En utilisant le champ de déplacements (2.35), il vient pour la matrice de masse :

$$\begin{aligned} [m] &= m_R [a_R]^T [a_R] + m_D [a_D]^T [a_D] + m_{RD} [a_R]^T [a_D] + m_{DR} [a_D]^T [a_R] \\ &= \begin{bmatrix} m_R + m_D - m_{RD} - m_{DR} & -m_D + m_{DR} \\ -m_D + m_{RD} & m_D \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.43a)$$

avec :

$$m_R = \int_0^L \rho A dx \quad , \quad m_D = \int_0^L \rho A N_D^2 dx \quad , \quad m_{RD} = m_{DR} = \int_0^L \rho A N_D dx \quad (2.43b)$$

2.3.6 Calcul de k_D , $f_{\text{th},D}$ et f_D à l'aide du théorème de Castigliano

En l'absence de forces d'inertie, l'effort normal se réduit à :

$$N(x) = N_j + F_x^p(x) \quad \text{avec} \quad F_x^p(x) = \int_x^L p_x(s) ds \quad (2.44)$$

L'énergie de déformation complémentaire est égale à :

$$E_{\text{def}}^c = \int_V \frac{\sigma_{xx}^2}{2E} dV + \int_V \sigma_{xx} \alpha \Delta T dV = \int_0^L \frac{N^2}{2EA} dx + \int_0^L N \alpha \Delta T dx \quad (2.45)$$

En appliquant le **deuxième théorème de Castigliano**, on obtient :

$$u_{j,D} = \frac{\partial E_{\text{def}}^c}{\partial N_j} = c N_j + u_D^p + \int_0^L \alpha \Delta T dx \quad (2.46)$$

avec

$$c = \int_0^L \frac{1}{EA} dx \quad , \quad u_D^p = \int_0^L \frac{F_x^p}{EA} dx \quad (2.47)$$

On en déduit par inversion :

$$N_j = k_D u_{j,D} - f_D - f_{\text{th},D} \quad (2.48)$$

avec :

$$k_D = \frac{1}{c} \quad , \quad f_D = k_D u_D^p \quad , \quad f_{\text{th},D} = k_D \int_0^L \alpha \Delta T dx$$

Remarques :

- On a la relation : $f_R = F_x^p(0)$.
- Dans la pratique, les intégrales (2.47) sont évaluées numériquement par la méthode de Gauss :

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^{npi} f(\xi_i) w_i \quad (2.49)$$

Si la poutre a une section constante, on obtient pour la matrice de rigidité le résultat exact avec un point d'intégration. Dans le cas contraire, le résultat dépend du nombre de points d'intégration.

3 Exemples

3.1 Exemple 1 : poutre soumise à des forces nodales

3.1.1 Énoncé

La poutre représentée sur la figure 5 est encastree à ses deux extrémités.

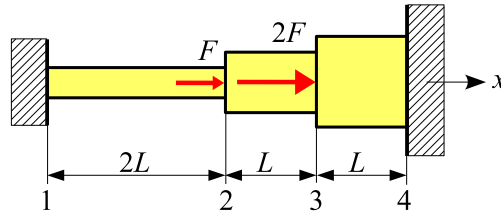


Figure 5 – Poutre soumise à des forces nodales

Soit E le module de Young du matériau.

L'aire de la section droite est égale à :

- A entre les sections 1 et 2.
- $2A$ entre les sections 2 et 3.
- $3A$ entre les sections 3 et 4.

La section 2 soumise à une force $(F, 0, 0)$ et la section 3 à une force $(2F, 0, 0)$.

3.1.2 Discrétisation de la poutre et partition des degrés de liberté

La poutre est discrétisée en trois éléments à deux nœuds (1 – 2), (2 – 3) et (3 – 4). Effectuons une partition des degrés de liberté en déplacements nuls $\{U_S\}$ et inconnus $\{U_L\}$ ([1], [16]) :

$$\{U_L\} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}, \quad \{U_S\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad \text{d'où} \quad \{U\} = \begin{Bmatrix} \{U_L\} \\ \{U_S\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_1 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

On en déduit la localisation des degrés de liberté dans les matrices globales :

$$\{DDL\} = \begin{Bmatrix} u_1 \rightarrow 0 \\ u_2 \rightarrow 1 \\ u_3 \rightarrow 2 \\ u_4 \rightarrow 0 \end{Bmatrix}$$

3.1.3 Étude élémentaire

Les matrices élémentaires sont :

$$[k_{1-2}] = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [k_{2-3}] = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [k_{3-4}] = \frac{3EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{ddl_{1-2}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \rightarrow 0 \\ u_2 \rightarrow 1 \end{Bmatrix}, \quad \{ddl_{2-3}\} = \begin{Bmatrix} u_2 \rightarrow 1 \\ u_3 \rightarrow 2 \end{Bmatrix}, \quad \{ddl_{3-4}\} = \begin{Bmatrix} u_3 \rightarrow 2 \\ u_4 \rightarrow 0 \end{Bmatrix}$$

3.1.4 Assemblage et calcul des déplacements inconnus

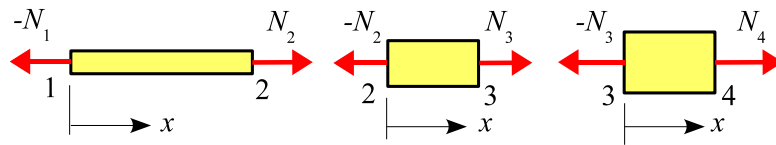
Les déplacements inconnus u_2 et u_3 sont les solutions de l'équation $[K_{LL}] \{U_L\} = \{F_{nod,L}\}$:

$$\frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 2F \end{Bmatrix} \quad \text{d'où}$$

$$u_2 = \frac{18}{17} \frac{FL}{EA} = 1.059 \frac{FL}{EA} \quad \text{et} \quad u_3 = \frac{14}{17} \frac{FL}{EA} = 0.824 \frac{FL}{EA}$$

3.1.5 Efforts et déplacements élémentaires

Les efforts et les déplacements élémentaires sont calculés à l'aide des formules du paragraphe (2.1.2) :



– élément 1 – 2 :

$$\begin{Bmatrix} -N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{9F}{17} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.529 \\ 0.529 \end{Bmatrix} F$$

$$N(x) = \frac{9F}{17} \quad , \quad \sigma_{xx}(x) = \frac{9}{17} \frac{F}{A} = 0.529 \frac{F}{A} \quad , \quad u(x) = \frac{9F}{17EA} x$$

– élément 2 – 3 :

$$\begin{Bmatrix} -N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{8F}{17} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.471 \\ -0.471 \end{Bmatrix} F$$

$$N(x) = -\frac{8F}{17} \quad , \quad \sigma_{xx}(x) = -\frac{4}{17} \frac{F}{A} = -0.235 \frac{F}{A} \quad , \quad u(x) = \frac{F}{17EA} (18L - 4x)$$

– élément 3 – 4 :

$$\begin{Bmatrix} -N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{42F}{17} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.471 \\ -2.471 \end{Bmatrix} F$$

$$N(x) = -\frac{42F}{17} \quad , \quad \sigma_{xx}(x) = -\frac{14}{17} \frac{F}{A} = -0.824 \frac{F}{A} \quad , \quad u(x) = \frac{14}{17} \frac{F}{EA} (L - x)$$

3.1.6 Actions de liaison

Elles sont déduites des efforts normaux :

$$F_{1x} = -N_1 = -\frac{9F}{17} \quad , \quad F_{4x} = N_4 = -\frac{42F}{17}$$

Remarque : l'équilibre de la poutre est vérifié : $F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} = 0$

3.1.7 Représentations graphiques

Le champ de déplacements $u(x)$ et la contrainte normale $\sigma_{xx}(x)$ sont représentés sur la figure (6).

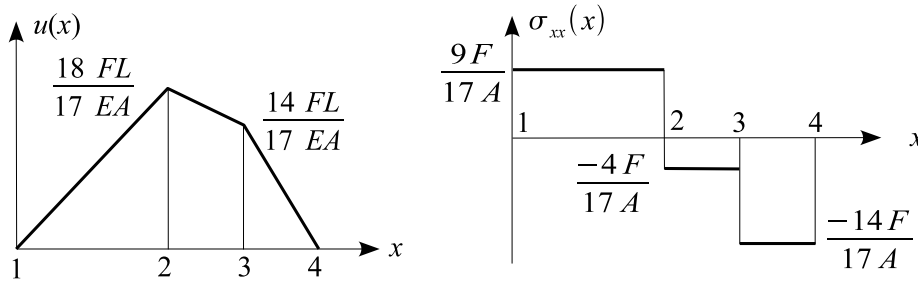


Figure 6 – Champ de déplacements et contrainte normale

3.2 Exemple 2 : poutre soumise à des forces réparties

3.2.1 Énoncé

La poutre représentée sur la figure 7 est constituée de deux tronçons de même longueur L . La section 1 est encadrée.

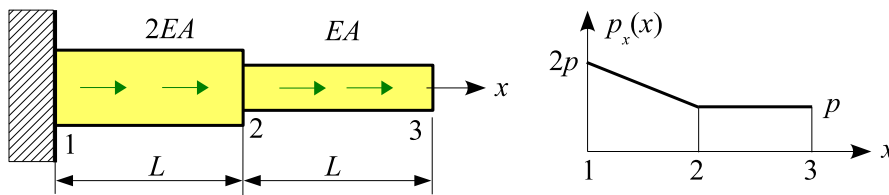


Figure 7 – Poutre soumise à des forces réparties

Soit E le module de Young du matériau.

L'aire de la section droite est égale à :

- $2A$ entre les sections 1 et 2.
- A entre les sections 2 et 3.

La poutre porte :

- entre les sections 1 et 2 une force dont l'intensité linéique varie linéairement entre $2p$ et p .
- entre les sections 2 et 3 une force uniformément répartie d'intensité linéique p .

3.2.2 Dicitérisation de la poutre et partition des degrés de liberté

La poutre est dicitrisée en deux éléments à deux nœuds (1 – 2) et (2 – 3) de longueur L . Effectuons une partition des degrés de liberté en déplacements nuls $\{U_S\}$ et inconnus $\{U_L\}$ ([1], [16]) :

$$\{U_L\} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad , \quad \{U_S\} = \{u_1\} \quad \text{d'où} \quad \{U\} = \begin{Bmatrix} \{U_L\} \\ \{U_S\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_1 \end{Bmatrix}$$

On en déduit la localisation des degrés de liberté dans les matrices globales :

$$\{DDL\} = \begin{cases} u_1 \rightarrow 0 \\ u_2 \rightarrow 1 \\ u_3 \rightarrow 2 \end{cases}$$

3.2.3 Étude élémentaire

Les matrices élémentaires sont :

$$\begin{aligned} [k_{1-2}] &= \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, & [k_{2-3}] &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ \{f_{1-2}\} &= \frac{pL}{6} \begin{Bmatrix} 5 \\ 4 \end{Bmatrix}, & \{f_{2-3}\} &= \frac{pL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ \{ddl_{1-2}\} &= \begin{cases} u_1 \rightarrow 0 \\ u_2 \rightarrow 1 \end{cases}, & \{ddl_{2-3}\} &= \begin{cases} u_2 \rightarrow 1 \\ u_3 \rightarrow 2 \end{cases} \end{aligned}$$

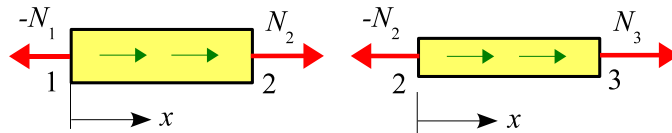
3.2.4 Assemblage et calcul des déplacements inconnus

Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation $[K_{LL}] \{U_L\} = \{F_L\}$:

$$\begin{aligned} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} &= \frac{pL}{6} \begin{Bmatrix} 7 \\ 3 \end{Bmatrix} \quad \text{d'où} \\ u_2 &= \frac{5}{6} \frac{pL^2}{EA} = 0.833 \frac{pL^2}{EA} \quad \text{et} \quad u_3 = \frac{4}{3} \frac{pL^2}{EA} = 1.333 \frac{pL^2}{EA} \end{aligned}$$

3.2.5 Efforts et déplacements élémentaires

Les efforts et les déplacements élémentaires sont calculés à l'aide des formules du paragraphe (2.1.2) :



– élément 1 – 2 :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} -N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} &= \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} - \frac{pL}{6} \begin{Bmatrix} 5 \\ 4 \end{Bmatrix} = \frac{pL}{2} \begin{Bmatrix} -5 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.5 \\ 1 \end{Bmatrix} pL \\ -N_1 + N_2 + \frac{3}{2} pL &= 0 \end{aligned}$$

$$N(x) = 2A\sigma_{xx} = \frac{5pL}{2} - 2px + p\frac{x^2}{2L}, \quad u(x) = \frac{1}{2EA} \left(\frac{5pL}{2}x - px^2 + p\frac{x^3}{6L} \right)$$

– élément 2 – 3 :

$$\begin{Bmatrix} -N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} - \frac{pL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} pL$$

$$-N_2 + N_3 + pL = 0$$

$$N(x) = A\sigma_{xx} = pL - px, \quad u(x) = \frac{5pL^2}{6EA} + \frac{1}{EA} \left(pLx - p\frac{x^2}{2} \right)$$

3.2.6 Action de liaison

L'action de liaison est égale à :

$$F_{1x} = -N_1 = -\frac{5pL}{2}$$

Remarque : l'équilibre de la poutre est vérifié :

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \frac{3pL}{2} + pL = -\frac{5pL}{2} + 0 + \frac{3pL}{2} + pL = 0$$

3.2.7 Représentations graphiques

Le champ de déplacements $u(x)$, l'effort normal $N(x)$ et la contrainte normale $\sigma_{xx}(x)$ sont représentés sur la figure (8).

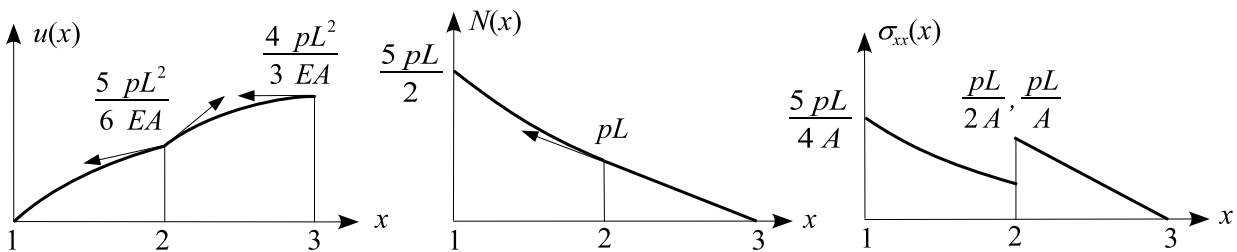


Figure 8 – Champ de déplacements, effort normal et contrainte normale

3.3 Exemple 3 : poutre soumise à des forces réparties

3.3.1 Énoncé

La poutre représentée sur la figure 9 est constituée de trois tronçons de même longueur L . Les sections 1 et 4 sont encastées.

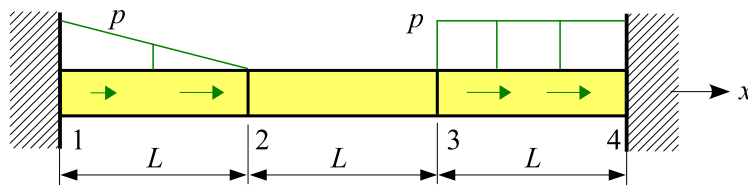


Figure 9 – Poutre soumise à des forces réparties

A et E sont respectivement l'aire de la section droite et le module de Young du matériau.

La poutre porte :

- entre les sections 1 et 2 une force dont l'intensité linéique varie linéairement entre p et 0.
- entre les sections 3 et 4 une force uniformément répartie d'intensité linéique p .

3.3.2 Dicitéisation de la poutre et partition des degrés de liberté

La poutre est discrétisée en trois éléments à deux nœuds (1 – 2), (2 – 3) et (3 – 4) de longueur L . Effectuons une partition des degrés de liberté en déplacements nuls $\{U_S\}$ et inconnus $\{U_L\}$ ([1], [16]) :

$$\{U_L\} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}, \quad \{U_S\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad \text{d'où} \quad \{U\} = \begin{Bmatrix} \{U_L\} \\ \{U_S\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_1 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

On en déduit la localisation des degrés de liberté dans les matrices globales :

$$\{DDL\} = \begin{Bmatrix} u_1 \rightarrow 0 \\ u_2 \rightarrow 1 \\ u_3 \rightarrow 2 \\ u_4 \rightarrow 0 \end{Bmatrix}$$

3.3.3 Étude élémentaire

Les matrices élémentaires sont :

$$[k_{1-2}] = [k_{2-3}] = [k_{3-4}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{f_{1-2}\} = \frac{pL}{6} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \{f_{3-4}\} = \frac{pL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\{ddl_{1-2}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \rightarrow 0 \\ u_2 \rightarrow 1 \end{Bmatrix}, \quad \{ddl_{2-3}\} = \begin{Bmatrix} u_2 \rightarrow 1 \\ u_3 \rightarrow 2 \end{Bmatrix}, \quad \{ddl_{3-4}\} = \begin{Bmatrix} u_3 \rightarrow 2 \\ u_4 \rightarrow 0 \end{Bmatrix}$$

3.3.4 Assemblage et calcul des déplacements inconnus

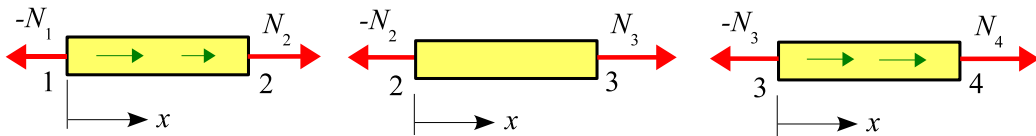
Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation $[K_{LL}] \{U_L\} = \{F_L\}$:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{pL}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} \quad \text{d'où}$$

$$u_2 = \frac{5}{18} \frac{pL^2}{EA} = 0.278 \frac{pL^2}{EA} \quad \text{et} \quad u_3 = \frac{7}{18} \frac{pL^2}{EA} = 0.389 \frac{pL^2}{EA}$$

3.3.5 Efforts et déplacements élémentaires

Les efforts et les déplacements élémentaires sont calculés à l'aide des formules du paragraphe (2.1.2) :



– élément 1 – 2 :

$$\begin{Bmatrix} -N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} - \frac{pL}{6} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{pL}{18} \begin{Bmatrix} -11 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.611 \\ 0.111 \end{Bmatrix} pL$$

$$-N_1 + N_2 + \frac{1}{2} pL = 0$$

$$N(x) = A\sigma_{xx} = \frac{11pL}{18} - px + p\frac{x^2}{2L}, \quad u(x) = \frac{1}{EA} \left(\frac{11pL}{18} x - p\frac{x^2}{2} + p\frac{x^3}{6L} \right)$$

– élément 2 – 3 :

$$\begin{Bmatrix} -N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{pL}{9} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.111 \\ 0.111 \end{Bmatrix} pL$$

$$N(x) = A\sigma_{xx} = \frac{pL}{9} \quad , \quad u(x) = \frac{5pL^2}{18EA} + \frac{pLx}{9EA}$$

– élément 3 – 4 :

$$\begin{Bmatrix} -N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} - \frac{pL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{pL}{9} \begin{Bmatrix} -1 \\ -8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.111 \\ -0.889 \end{Bmatrix} pL$$

$$-N_3 + N_4 + pL = 0$$

$$N(x) = A\sigma_{xx} = \frac{pL}{9} - px \quad , \quad u(x) = \frac{7pL^2}{18EA} + \frac{1}{EA} \left(\frac{pL}{9}x - p\frac{x^2}{2} \right)$$

Le champ de déplacements passe par une valeur maximale pour x_m tel que $\sigma_{xx}(x_m) = 0$ d'où

$$x_m = L/9 = 0.111L \quad , \quad u(x_m) = 32pL^2/81EA = 0.395pL^2/EA$$

3.3.6 Action de liaison

Les actions de liaison sont égales à :

$$F_{1x} = -N_1 = -\frac{11}{18}pL = -0.611pL \quad , \quad F_{4x} = N_4 = -\frac{8}{9}pL = -0.889pL$$

Remarque : l'équilibre de la poutre est vérifié :

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} + \frac{1}{2}pL + pL = -\frac{11}{18}pL + 0 + 0 - \frac{8}{9}pL + \frac{1}{2}pL + pL = 0$$

3.3.7 Représentations graphiques

Le champ de déplacements $u(x)$ et l'effort normal $N(x)$ sont représentés sur la figure (10).

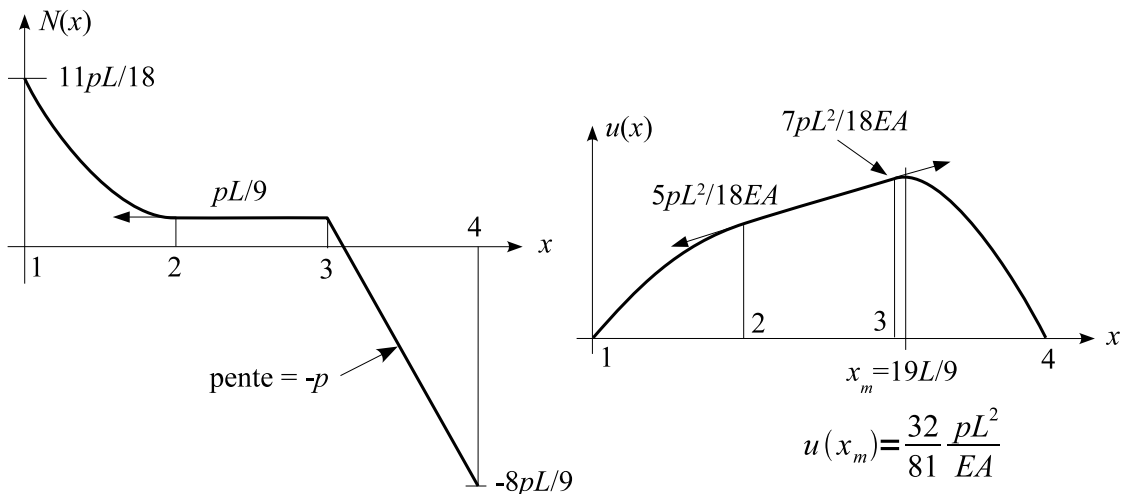


Figure 10 – Effort normal et champ de déplacements

3.4 Exemple 4 : poutre soumise à un gradient thermique

3.4.1 Énoncé

La poutre (figure 11) de section droite constante (carré plein de côté c) est encastree à ses deux extrémités.

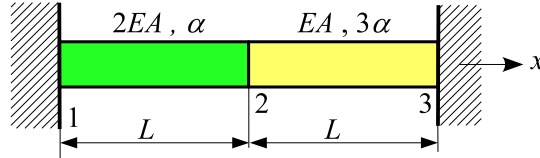


Figure 11 – Poutre soumise à un gradient thermique

Elle est constituée de deux matériaux :

- entre les sections 1 et 2 :
 - module de Young : $2E$
 - coefficient de dilatation : α
- entre les sections 2 et 3 :
 - module de Young : E
 - coefficient de dilatation : 3α

La poutre est soumise à une variation de température $\Delta T > 0$.

3.4.2 Discrétisation de la poutre et partition des degrés de liberté

La poutre est discrétisée en deux éléments à deux nœuds (1 – 2) et (2 – 3) de longueur L . Effectuons une partition des degrés de liberté en déplacements nuls $\{U_S\}$ et inconnus $\{U_L\}$ ([1], [16]) :

$$\{U_L\} = \{u_2\} \quad , \quad \{U_S\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad \text{d'où} \quad \{U\} = \begin{Bmatrix} \{U_L\} \\ \{U_S\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

On en déduit la localisation des degrés de liberté dans les matrices globales :

$$\{DDL\} = \begin{Bmatrix} u_1 \rightarrow 0 \\ u_2 \rightarrow 1 \\ u_3 \rightarrow 0 \end{Bmatrix}$$

3.4.3 Étude élémentaire

Les matrices élémentaires sont :

$$[k_{1-2}] = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad [k_{2-3}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A = c^2$$

$$\{ddl_{1-2}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \rightarrow 0 \\ u_2 \rightarrow 1 \end{Bmatrix} \quad , \quad \{ddl_{2-3}\} = \begin{Bmatrix} u_2 \rightarrow 1 \\ u_3 \rightarrow 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{f_{th\ 1-2}\} = 2EA\alpha\Delta T \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad , \quad \{f_{th\ 2-3}\} = 3EA\alpha\Delta T \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

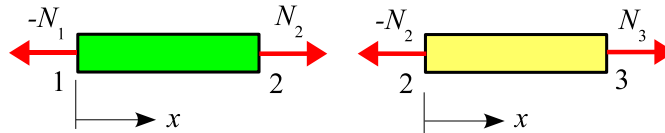
3.4.4 Assemblage et calcul du déplacement inconnu

Le déplacement inconnu u_2 est la solution de l'équation $[K_{LL}] \{U_L\} = \{F_{th,L}\}$:

$$\frac{EA}{L} 3u_2 = -EA\alpha\Delta T \quad \text{d'où} \quad u_2 = -\frac{1}{3}L\alpha\Delta T = -0.333L\alpha\Delta T$$

3.4.5 Efforts et déplacements élémentaires

Les efforts et les déplacements élémentaires sont calculés à l'aide des formules du paragraphe (2.1.2) :



– élément 1 – 2 :

$$\begin{Bmatrix} -N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} = [k_{1-2}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} - \{f_{th,1-2}\} = \frac{8}{3}EA\alpha\Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.667 \\ -2.667 \end{Bmatrix} EA\alpha\Delta T$$

$$N(x) = -\frac{8}{3}EA\alpha\Delta T \quad , \quad u(x) = -\frac{1}{3}\alpha\Delta T x$$

– élément 2 – 3 :

$$\begin{Bmatrix} -N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} = [k_{2-3}] \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} - \{f_{th,2-3}\} = \frac{8}{3}EA\alpha\Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$N(x) = -\frac{8}{3}EA\alpha\Delta T \quad , \quad u(x) = \frac{1}{3}\alpha\Delta T (x - L)$$

3.4.6 Actions de liaison

Elles sont déduites des efforts normaux :

$$F_{1x} = -N_1 = \frac{8}{3}EA\alpha\Delta T \quad F_{3x} = N_3 = -\frac{8}{3}EA\alpha\Delta T$$

Remarque : l'équilibre de la poutre est vérifié : $F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0$

3.4.7 Représentations graphiques

Le champ de déplacements $u(x)$ et l'effort normal $N(x)$ sont représentés sur la figure (12).

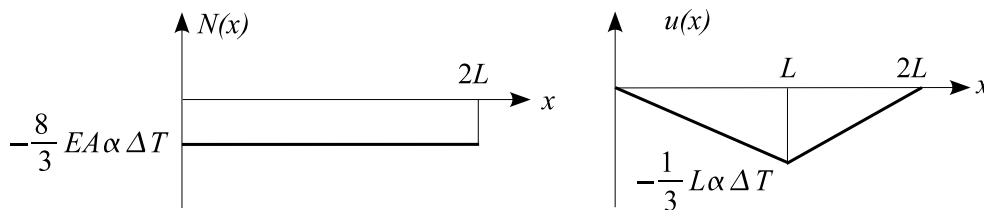


Figure 12 – Champ de déplacements et effort normal

3.4.8 Application numérique

On donne : $L = 0.4$ m, $c = 10$ mm, $E = 100000$ MPa, $\alpha = 3 \cdot 10^{-6}$ K $^{-1}$, $\Delta T = 50$ K.

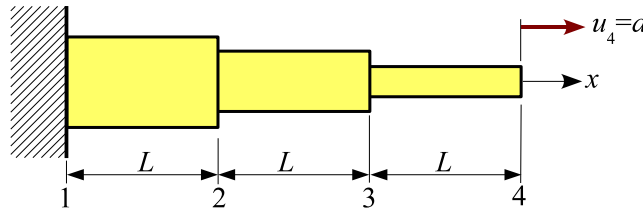
On obtient : $u_2 = 0.02$ mm, $N = -4000$ N, $\sigma_{xx} = -40$ MPa.

Remarque : le coefficient de charge critique est égal à $\lambda_C = 1.68$ (RDM-Ossatures) ; la poutre devient donc instable pour $\Delta T = 1.68 \times 50$ K = 84 K.

3.5 Exemple 5 : problème à déplacement imposé

3.5.1 Énoncé

La poutre représentée sur la figure est constituée de trois tronçons de longueur L . L'aire de la section droite est égale à $3A$ entre les sections 1 et 2, $2A$ entre les sections 2 et 3 et à A entre les sections 3 et 4. Soit E le module de Young du matériau.



La section 1 est encadrée et la section 4 subit un déplacement $u_4 = d$.

3.5.2 Discrétisation de la poutre et partition des degrés de liberté

La poutre est discrétisée en trois éléments à deux nœuds. Effectuons une partition des degrés de liberté en déplacements connus (non nuls : $\{U_P\}$, nuls : $\{U_S\}$) et inconnus $\{U_L\}$ ([1], [16]) :

$$\{U_L\} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}, \quad \{U_S\} = \{u_1\}, \quad \{U_P\} = \{u_4 = d\} \quad \text{d'où} \quad \{U\} = \begin{Bmatrix} \{U_L\} \\ \{U_P\} \\ \{U_S\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_1 \end{Bmatrix}$$

On en déduit la localisation des degrés de liberté dans les matrices globales :

$$\{DDL\} = \begin{Bmatrix} u_1 \rightarrow 0 \\ u_2 \rightarrow 1 \\ u_3 \rightarrow 2 \\ u_4 \rightarrow 3 \end{Bmatrix}$$

3.5.3 Étude élémentaire

Les matrices élémentaires sont :

$$[k_{1-2}] = \frac{3EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [k_{2-3}] = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [k_{3-4}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{ddl_{1-2}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \rightarrow 0 \\ u_2 \rightarrow 1 \end{Bmatrix}, \quad \{ddl_{2-3}\} = \begin{Bmatrix} u_2 \rightarrow 1 \\ u_3 \rightarrow 2 \end{Bmatrix}, \quad \{ddl_{3-4}\} = \begin{Bmatrix} u_3 \rightarrow 2 \\ u_4 \rightarrow 3 \end{Bmatrix}$$

3.5.4 Assemblage et calcul des déplacements inconnus

Les déplacements inconnus u_2 et u_3 sont les solutions de l'équation :

$$[[K_{LL}] \quad [K_{LP}]] \begin{Bmatrix} \{U_L\} \\ \{U_P\} \end{Bmatrix} = \{0\}$$

soit :

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 = d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{d'où}$$

$$u_2 = \frac{2}{11} d = 0.182 d \quad \text{et} \quad u_3 = \frac{5}{11} d = 0.455 d$$

3.5.5 Effort normal et actions de liaisons

L'effort normal est constant dans la poutre :

$$N = \frac{3EA}{L} (u_2 - u_1) = \frac{6}{11} \frac{EAd}{L} = 0.545 \frac{EAd}{L}$$

On en déduit les actions de liaisons :

$$F_{4x} = -F_{1x} = \frac{6}{11} \frac{EAd}{L}$$

F_{4x} est la force qu'il faut exercer sur la section 4 pour avoir $u_4 = d$.

3.6 Exemple 6 : poutre reposant sur deux appuis élastiques

3.6.1 Énoncé

La poutre représentée sur la figure 13 repose sur deux appuis élastiques de raideurs respectives k_1 et k_3 .

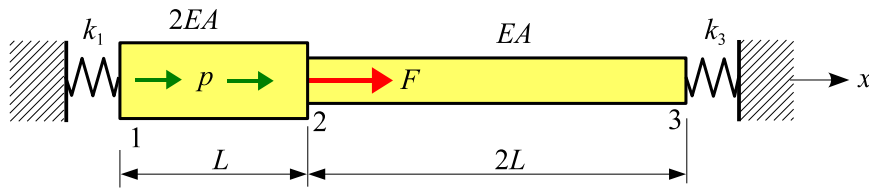


Figure 13 – Poutre reposant sur deux appuis élastiques

E est le module de Young du matériau.

L'aire de la section droite est $2A$ entre les sections 1 et 2 et A entre les sections 2 et 3.

La section 2 porte une force d'intensité F . La poutre porte une force uniformément répartie d'intensité linéique p entre les sections 1 et 2.

3.6.2 Matrices élémentaires

La poutre est discrétisée en deux éléments de longueur L et $2L$. Les matrices élémentaires sont :

$$[k_{1-2}] = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \{f_{1-2}\} = \frac{pL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad [k_{2-3}] = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3.6.3 Assemblage

L'assemblage conduit à la relation :

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -k_1 u_1 \\ F \\ -k_3 u_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{pL}{2} \\ \frac{pL}{2} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

3.6.4 Déplacements

Les déplacements inconnus sont les solutions de l'équation $[K_{LL}] \{U_L\} = \{F_L\}$:

$$\begin{bmatrix} \frac{2EA}{L} + k_1 & -\frac{2EA}{L} & 0 \\ -\frac{2EA}{L} & \frac{5EA}{2L} & -\frac{EA}{2L} \\ 0 & -\frac{EA}{2L} & \frac{EA}{2L} + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{pL}{2} \\ F + \frac{pL}{2} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Remarque : on obtient le même résultat en considérant les deux appuis comme deux éléments de matrices de rigidité :

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$

3.7 Exemple 7 : modes propres

3.7.1 Énoncé

La poutre de longueur $2L$ représentée sur la figure 14 est encastree à ses deux extrémités.

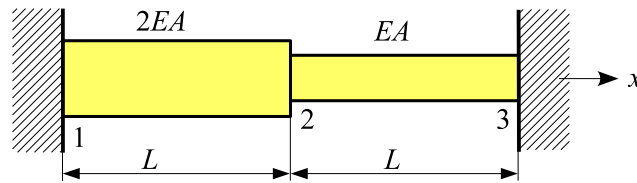


Figure 14 – Modes propres

L'aire de la section est égale à $2A$ entre les sections 1 et 2 et à A entre les sections 2 et 3.

Soient E et ρ respectivement le module de Young et la masse volumique du matériau.

3.7.2 Discrétisation de la poutre et partition des degrés de liberté

La poutre est discrétisée en deux éléments à deux nœuds (1–2) et (2–3) de longueur L . Effectuons une partition des degrés de liberté en déplacements nuls $\{U_S\}$ et inconnus $\{U_L\}$ ([1], [16]) :

$$\{U_L\} = \{u_2\}, \quad \{U_S\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad \text{d'où} \quad \{U\} = \begin{Bmatrix} \{U_L\} \\ \{U_S\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

On en déduit la localisation des degrés de liberté dans les matrices globales :

$$\{DDL\} = \begin{Bmatrix} u_1 \rightarrow 0 \\ u_2 \rightarrow 1 \\ u_3 \rightarrow 0 \end{Bmatrix}$$

3.7.3 Étude élémentaire

Les matrices élémentaires sont :

$$[k_{1-2}] = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad [m_{1-2}] = \frac{2\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \{ddl_{1-2}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \rightarrow 0 \\ u_2 \rightarrow 1 \end{Bmatrix}$$

$$[k_{2-3}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad [m_{2-3}] = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \{ddl_{2-3}\} = \begin{Bmatrix} u_2 \rightarrow 1 \\ u_3 \rightarrow 0 \end{Bmatrix}$$

3.7.4 Assemblage et calcul

Le déplacement u_2 est solution de l'équation $[M_{LL}]\{\ddot{U}_L\} + [K_{LL}]\{U_L\} = \{0\}$:

$$\frac{\rho AL}{6} [6] \{\ddot{u}_2\} + \frac{EA}{L} [3] \{u_2\} = \{0\}$$

On cherche la solution harmonique $u_2 = a \sin \omega t$ d'où :

$$-\frac{\rho AL}{6} 6\omega^2 a \sin \omega t + \frac{EA}{L} 3a \sin \omega t = 0$$

On en déduit :

$$\omega^2 = \frac{3E}{\rho L^2}$$

La pulsation propre est égale à :

$$\omega = C \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}} \quad \text{avec} \quad C = \sqrt{3} = 1.732$$

Le vecteur propre associé est : $\begin{Bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{Bmatrix}$ (figure 15).

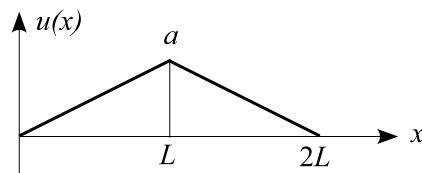


Figure 15 – Mode 1

3.7.5 Remarque : influence de la discrétisation

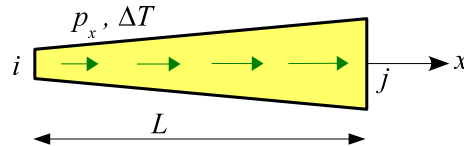
Chaque tronçon est discrétisée en n éléments.

n	C
1	1.732
2	1.611
3	1.589
4	1.581
10	1.572

3.8 Élément de poutre à section variable

L'élément de poutre $i - j$, de longueur L , est un carré plein dont le côté varie linéairement entre c et $2c$:

$$A(x) = c^2 \left(1 + \frac{x}{L}\right)^2$$



L'élément porte sur toute sa longueur une force répartie d'intensité linéique :

$$p_x(x) = p_{xi} + (p_{xj} - p_{xi}) \frac{x}{L}$$

et subit une variation de température ΔT constante dans l'élément.

Soit E et α le module de Young et le coefficient de dilatation du matériau.

3.8.1 Méthode du paragraphe 2.1.2

On obtient (programme : `mat_var1`) :

$$[k] = \frac{2 E c^2}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{f\} = \frac{L}{2} \begin{bmatrix} -5 + 8 \ln(2) & 3 - 4 \ln(2) \\ 6 - 8 \ln(2) & -2 + 4 \ln(2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{xi} \\ p_{xj} \end{Bmatrix}, \quad \{f_{th}\} = 2 E c^2 \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

3.8.2 Utilisation des fonctions d'interpolation (avec ou sans partition du champ de déplacements en mouvement de corps rigide et mouvement de déformation pure)

On obtient (programme : `mat_var2`) :

$$[k] = \frac{7 E c^2}{3 L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [m] = \frac{\rho c^2 L}{60} \begin{bmatrix} 32 & 23 \\ 23 & 62 \end{bmatrix}$$

$$\{f\} = \frac{L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{xi} \\ p_{xj} \end{Bmatrix}, \quad \{f_{th}\} = \frac{7}{3} E c^2 \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

3.8.3 Utilisation du théorème de Castigliano

On obtient (programme : **mat_var3**) le même résultat qu'au paragraphe 3.8.1.

Dans la pratique, les intégrales (2.47) sont évaluées numériquement et le résultat dépend du nombre de points d'intégration (tableau 2).

TABLE 2 – Influence du nombre de points d'intégration

npi	$(k_D - k_{D_{exact}})/k_{D_{exact}}$
2	0.0059523809524
3	0.0002520161290
4	0.0000097049689
5	0.0000003530465
6	0.0000000123759
7	0.0000000004227
8	0.0000000000142
9	0.0000000000005

4 Programmes Maple

Les programmes suivant se trouvent dans le fichier **normal.txt**.

4.1 mat_elem1

```
# calcul de la matrice de rigidité et du vecteur force
# d'un élément de poutre à section constante

restart:with(linalg):

assume(L>0):

# charges

px:=x->pxi+(pxj-pxi)*x/L;

# effort normal

N:=x->Ni-int(px(s),s=0..x);N(x);

# champ de déplacements

u:=x->ui+int(N(s)/E/A+alpha*DT,s=0..x);u(x);

# calcul des efforts nodaux en fonction des déplacements nodaux

solve(uj=u(L),Ni):assign(%):
```

```

Nj:=N(L):

# matrice de rigidité

k:=jacobian([-Ni,Nj],[ui,uj]);

# vecteur force

f:=jacobian([Ni,-Nj],[pxi,pxj,DT]);

# remarque : fonctions d'interpolation

Nu:=grad(u(x),[ui,uj]);

```

4.2 mat_elem2

```

# calcul des matrices élémentaires
# d'un élément de poutre à section constante
# à l'aide des fonctions d'interpolation

restart:with(linalg):

# représentation de la géométrie et jacobien

x:=(1+xi)*L/2;J:=L/2;

# fonctions d'interpolation

Nu:=[(1-xi)/2,(1+xi)/2];

# matrice de rigidité

B:=[-1/L,1/L];
k:=matrix(2,2,(i,j)->int(B[i]*B[j]*E*A*J,xi=-1..1));

# matrice de masse

m:=matrix(2,2,(i,j)->int(Nu[i]*Nu[j]*rho*A*J,xi=-1..1));

# vecteur force

px:=pxi+(pxj-pxi)*x/L:
f:=vector(2,i->int(Nu[i]*px*J,xi=-1..1)):simplify(f);
fth:=vector(2,i->int(B[i]*E*A*alpha*DT*J,xi=-1..1));

```

4.3 mat_var1

```

# calcul de la matrice de rigidité et du vecteur force
# d'un élément de poutre à section variable

```

```

restart:with(linalg):

assume(L>0):

# charges

px:=x->pxi+(pxj-pxi)*x/L;

# effort normal

N:=x->Ni-int(px(s),s=0..x);

# champ de déplacements

A:=x->c^2*(1+x/L)^2;
u:=x->ui+int(N(s)/E/A(s)+alpha*DT,s=0..x,continuous);

# calcul des efforts nodaux en fonction des déplacements nodaux

solve(uj=u(L),Ni):assign(%):
Nj:=N(L):

# matrice de rigidité

k:=jacobian([-Ni,Nj],[ui,uj]);

# vecteur force

f:=jacobian([Ni,-Nj],[pxi,pxj,DT]):simplify(f);

```

4.4 mat_var2

```

# calcul des matrices élémentaires
# d'un élément de poutre à section variable
# à l'aide des fonctions d'interpolation

restart:with(linalg):

# représentation de la géométrie et jacobien

x:=(1+xi)*L/2;J:=L/2; Nu:=[(1-xi)/2,(1+xi)/2];
A:=c^2*(1+x/L)^2;

# matrice de rigidité

B:=[-1/L,1/L];
k:=matrix(2,2,(i,j)->int(B[i]*B[j]*E*A*J,xi=-1..1));

# matrice de masse

```

```

m:=matrix(2,2,(i,j)->int(Nu[i]*Nu[j]*rho*A*J,xi=-1..1));

# vecteur force

px:=pxi+(pxj-pxi)*x/L:
f:=vector(2,i->int(Nu[i]*px*J,xi=-1..1)):simplify(f);
fth:=vector(2,i->int(B[i]*E*A*alpha*DT*J,xi=-1..1));

```

4.5 mat_var3

```

# calcul de la matrice de rigidité et du vecteur force
# d'un élément de poutre à section variable
# à l'aide du théorème de Castigliano

restart:with(linalg):

A:=c^2*(1+x/L)^2;
# matrice de rigidité

C:=int(1/E/A,x=0..L,continuous):
kD:=1/C:
k:=matrix(2,2,[[kD,-kD],[-kD,kD]]);

# vecteur force

px:=x->pxi+(pxj-pxi)*x/L:
Fpx:=x->int(px(s),s=x..L):
fR:=simplify(Fpx(0));
upD:=int(Fpx(x)/E/A,x=0..L,continuous):

fD:=kD*upD; f:=vector(2,[fR-fD,fD]):
f:=jacobian(f,[pxi,pxj]):simplify(f);

fthD:=kD*int(alpha*DT,x=0..L);

```

Références

- [1] J. H. ARGYRIS et H.-P. MLEJNEK – *Die methode der finiten elemente, Band I. Verschiebungsmethode in der statik*, Vieweg, 1986.
- [2] J. H. ARGYRIS et D. SCHARPF – « Some general considerations on the natural mode technique. Part I, Small displacements, Part II, Large displacements », *The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society* **73** (1969), p. 218–226, 361–368.
- [3] J.-F. AUBOUIN – *Calcul des structures et informatique*, Eyrolles, 1983.
- [4] J.-L. BATOZ et G. DHATT – *Modélisation des structures par éléments finis, Volume 1. Solides élastiques*, Hermès, 1990.
- [5] — , *Modélisation des structures par éléments finis, Volume 2. Poutres et plaques*, Hermès, 1990.
- [6] A. BAZERGUI, T. BUI-QUOC, A. BIRON, G. MCINTYRE et C. LABERGE – *Résistance des matériaux*, 3 éd., Éditions de l'École Polytechnique de Montréal, 2002.
- [7] R. D. COOK, D. S. MALKUS et M. E. PLESHA – *Concepts and applications of finite element analysis*, 3 éd., Wiley, 1989.
- [8] J. COURBON – *Résistance des matériaux, Tome 1*, 2 éd., Dunod, 1964.
- [9] — , *Résistance des matériaux, Tome 2*, Dunod, 1965.
- [10] — , *Éléments de résistance des matériaux*, Dunod, 1970.
- [11] G. DHATT, G. TOUZOT et E. LEFRANÇOIS – *Méthode des éléments finis*, Hermès, 2005.
- [12] F. FREY – *Traité du génie civil, Volume 2. Analyse des structures et milieux continus. Mécanique des structures*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2000.
- [13] F. FREY et J. JIROUSEK – *Traité du génie civil, Volume 6. Méthode des éléments finis*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2001.
- [14] D. GAY et J. GAMBELIN – *Une approche simple du calcul des structures par la méthode des éléments finis*, Hermès, 1989.
- [15] — , *Dimensionnement des structures. Une introduction*, Hermès, 1999.
- [16] J.-F. IMBERT – *Analyse des structures par éléments finis*, 3 éd., Cépaduès, 1995.
- [17] S. LAROZE – *Mécanique des structures, Tome 2. Théorie des poutres*, 2 éd., Eyrolles/Masson, 1988.
- [18] M. PETYT – *Introduction to finite element vibration analysis*, Cambridge University Press, 1990.
- [19] A. PORTELA et A. CHARAFI – *Finite elements using Maple. A Symbolic Programming Approach*, Springer, 2002.
- [20] J. S. PRZEMIENIECKI – *Theory of matrix structural analysis*, Dover, 1986.
- [21] J. SALENÇON – *Mécanique des milieux continus, Tome 3. Milieux curvilignes*, Éditions de l'École polytechnique, 2001.
- [22] S. P. TIMOSHENKO – *Résistance des matériaux, Tome 1. Théorie élémentaire et problèmes*, Dunod, 1968.
- [23] W. WEAVER et J. M. GERE – *Matrix analysis of framed structures*, 3 éd., Van Nostrand Reinhold, 1990.
- [24] C. WIELGOZ – *Cours et exercices de résistance des matériaux : élasticité, plasticité, éléments finis*, Ellipses, 1999.
- [25] W. WUNDERLICH et W. D. PILKEY – *Mechanics of structures. Variational and computational methods*, 2 éd., CRC PRESS, 2003.